

# Complexe Stromen

## Een module voor nlt en wiskunde D

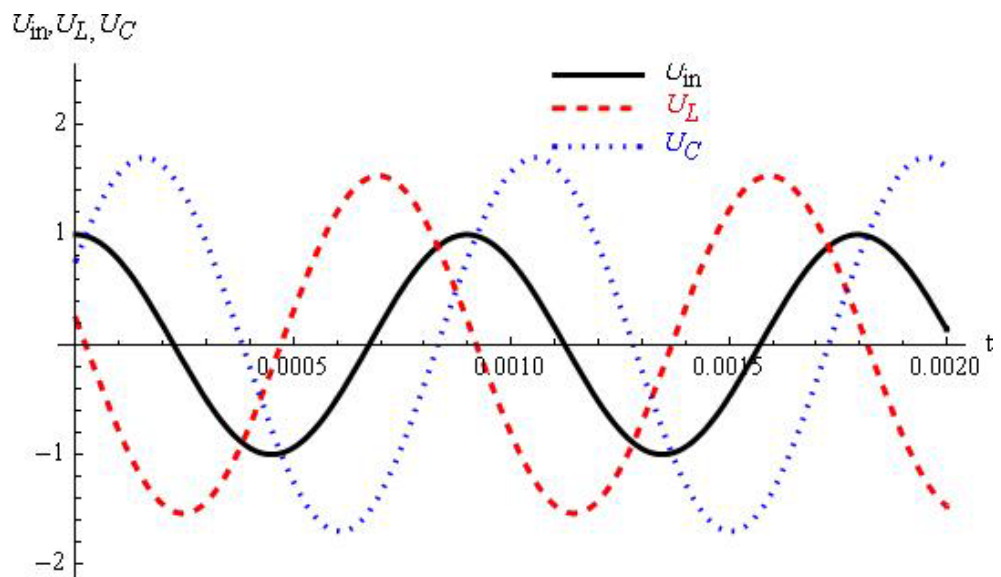
Complexe getallen zijn intrigerend voor wiskundig begaafde leerlingen met een NT-profiel. Ze zijn des te meer verrast als blijkt dat je met complexe getallen wisselstromen kunt beschrijven en dat complexe getallen helpen bij het ontwerpen van versterkers of mobieltjes. De module *Complexe Stromen* brengt de wiskunde van complexe getallen en de natuurkunde van wisselstromen bij elkaar in één module.

■ **Ton van der Valk en Aad Goddijn** / Universiteit Utrecht, Flsme en JCU

Het onderwerp elektrische schakelingen uit het examenprogramma natuurkunde vwo beperkt zich tot gelijkstroomkringen, met schakelementen als spanningsbron, weerstand, lampje en (elektronische) schakelaars. Leerlingen leren rekenen met weerstanden, maar de functies van weerstanden in een schakeling (spanning delen; stroom beperken; omzetten van elektrische energie in warmte) blijven relatief onderbelicht. Elektrische schakelingen in apparaten als mp3-spelers, mobieltjes en computers, hebben als functie het bewerken van wisselspanningsignalen: signalen met een frequentie, een amplitude en een fase. Een voorbeeld van zo'n bewerking is het selectief versterken of verzwakken van signalen met bepaalde frequenties (filteren). Dat vereist schakelementen die frequentieafhankelijk reageren op *verandering* van stromen. Een condensator (C) en een spoel (L) beïnvloeden op een frequentieafhankelijke manier de amplitude en de fase van een signaal. Bij het wiskundig beschrijven van deze signalen en de manier waarop ze door de schakeling worden beïnvloed, kunnen complexe getallen heel nuttig zijn omdat ze het formalisme sterk kunnen vereenvoudigen. De sterke samenhang tussen natuurkunde en wiskunde maakt dit onderwerp geschikt voor het vak nlt.

### Complexe stromen

De module *Complexe Stromen* gaat over netwerken die bestaan uit een weerstand en een spoel of een condensator. Op de ingang van het netwerk zet je een sinusvormige spanning  $U_{in}$  met een



De spanningen  $U_L$  over de spoel en  $U_C$  over de condensator geven samen de aangelegde spanning  $U_{in}$ .

bepaalde frequentie. De vraag is dan hoe je kunt voorspellen welk uitgangssignaal  $U_{uit}$  ontstaat. Het basisidee van de module is dat de natuurkunde tegen een probleem oploopt, waar de wiskunde een oplossing voor aandraagt. Daarmee kan de natuurkunde weer verder; tot het volgende probleem, enzovoorts. De module start met natuurkunde. Het eerste hoofdstuk begint met een herha-

elementen met elkaar samenhangen (differentiëren! Bijvoorbeeld  $U_L = L \cdot dI/dt$ ). Daarna volgt een demonstratie van een schakeling met een toongenerator (als spanningsbron met instelbare frequentie), een spoel en een condensator. Omdat de (gemiddelde) spanningen over de drie schakelementen worden gemeten met een voltmeter, is de som van de spanning over de condensator en de spoel bij een

“Deze module legt het verband tussen iets zuiver wiskundigs en natuurkunde”

ling van de wet van Ohm. Dan berekenen de leerlingen de versterking als  $U_{uit} / U_{in}$  voor verschillende ohmse schakelingen. Vervolgens maken ze kennis met de spoel en condensator en leren hoe spanning en stroom bij die schakel-

bepaalde frequentie (veel) groter dan over de toongenerator. Ra ra, hoe kan dat? De oplossing wordt duidelijk als de signalen afzonderlijk op een oscilloscoop bekeken worden. Het signaal wordt

door de condensator een stukje in de tijd verschoven en de spoel schuift hem weer een stukje terug. Daardoor is de som van de spanningen op elk moment toch gelijk aan de spanning die op dat moment door de toengenerator wordt geleverd. De voltmeter meet een soort tijdsgemiddelde van een signaal en zulke gemiddelden mag je niet zo maar optellen! En dat heeft ook consequenties voor de versterking: ook die hangt af van de verschuiving die het signaal in het netwerk ondervindt. Bij wisselstroomschakelingen moet je dus rekening houden met het sinuskarakter van het signaal. Dat vereist het ophalen en vergroten van de wiskundige kennis van de sinusfunctie!

Daarom gaat hoofdstuk 2 over het bewerken van tijdsafhankelijke sinusfuncties (optellen, vermenigvuldigen, differentiëren). De beschrijving van de beweging van een driewiekgige windmolen is hierbij het leidend voorbeeld.

Aan de hand van de draaiende molenwieken worden de begrippen hoekfrequentie en fasehoek geïntroduceerd. Daarna wordt overgestapt op de voorstelling van roterende vectoren in de eenheidscirkel, die de cosinus en sinus

van de frequentie. Logisch, want bij frequentie nul (gelijkspanning) laat de condensator geen stroom door, bij hogere frequentie wel, des te meer naarmate de frequentie hoger is. Het quotiënt  $U_{uit} / U_{in}$  kan niet meer be-

### De RLC-kring kent een resonantiefrequentie. Die eigenschap gebruik je bij het afstemmen van een radio

als (cartesische) componenten heeft. Differentiëren is nodig om de baansnelheid van de tip van de wiek te bepalen. Met dat gereedschap kunnen in het natuurkundige hoofdstuk 3 de eigenschappen van een schakeling (netwerk) waarin een condensator opgenomen is, bepaald worden. De stroom door de condensator blijkt dan  $1/4$  trillingstijd voor te lopen op de spanning (fase  $1/4$ ). De 'weerstand' van een condensator voor wisselstroom (impedantie) wordt gedefinieerd en blijkt afhankelijk

rekend worden voor wisselspanningen waarbij een verschuiving is opgetreden. Immers  $U_{in}$  is een sinus die af en toe nul is en delen door nul mag niet. Nu kun je de versterking  $G$  van een wisselstroomnetwerk wel definiëren als het quotiënt van de amplitudes van de in- en uitgangspanningen, maar dan houd je geen rekening met de verschuiving van de stroom, het faseverschil  $\varphi$ . Daarom wordt aan het eind van hoofdstuk 3 een nieuwe grootte gedefinieerd, de overdracht  $H$ , als het getallenpaar  $H = (G, \varphi)$ . Hoofdstuk 3 eindigt met de vraag: wat zijn daarvan de wiskundige eigenschappen?

In het wiskundige hoofdstuk 4 worden de eigenschappen van het getallenpaar  $(G, \varphi)$  onderzocht aan de hand van de in hoofdstuk 2 geïntroduceerde diagrammen van roterende vectoren. De rekenregels worden opgesteld, zoals  $H_1 * H_2 = (G_1 * G_2, \varphi_1 + \varphi_2)$ . Getallen die aan die rekenregels voldoen worden 'complexe getallen' genoemd. Een positief getal  $P$  blijkt dan ook geschreven te kunnen worden als  $(P, 0)$  en een negatief getal  $-N$  als  $(N, \pi)$ . Er blijkt dan ook een getal  $i = (1, \pi/2)$  te zijn dat in het kwadraat  $i^2 = (1, \pi) = -1$  is. Bewezen wordt dat elk complex getal ook geschreven kan worden als  $a + b i$ . Tot slot wordt afgeleid dat  $\cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$ . Daarmee kan de sinusvormige spanning geschreven worden als  $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$  of, met faseverschuiving  $\varphi$ :  $U(t) = U_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$ .

Met behulp van het aldus gevonden formalisme kan in het natuurkundige hoofdstuk 5 het probleem van de complexe overdracht opgelost worden. Tevens kan de complexe impedantie  $Z$  worden gedefinieerd. Daarmee wordt de 'complexe wet van Ohm' geformuleerd. Als toepassing worden de frequentie-karakteristiek van een RL-netwerk

**Complexe stromen**

een 6 vwo module voor nlt en wiskunde D

Universiteit Utrecht

Junior College Utrecht

De voorkant van de module Complexe Stromen.

opgesteld. Dat netwerk blijkt een grote impedantie te vertonen voor hoge frequenties en kan daardoor gebruikt worden om hoge frequenties uit te filteren. Dienovereenkomstig kan een RC-netwerk gebruikt worden om lage frequenties uit te filteren.

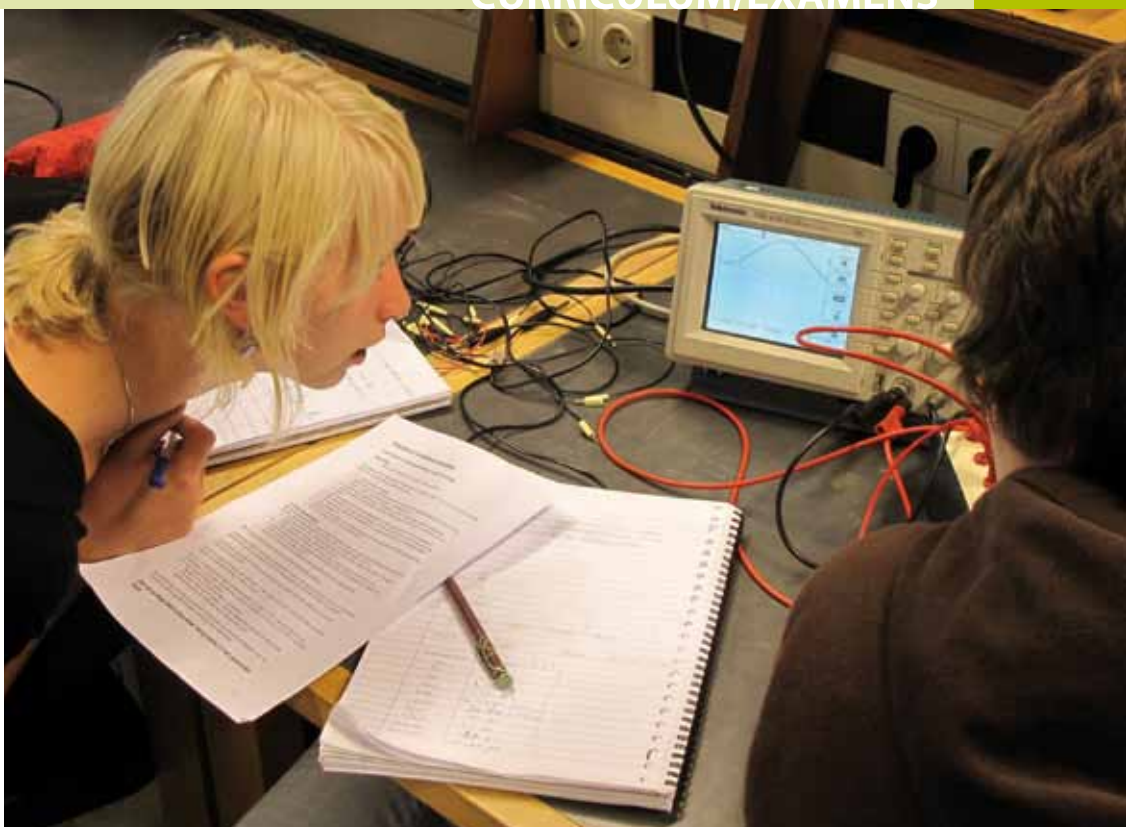
Wiskundig gezien kent de frequentie-karakteristiek van een RLC-netwerk een singulariteit waarin de overdracht naar oneindig dreigt te gaan. In de praktijk zien we dat terug als resonantie in de RLC-kring. Die eigenschap gebruik je bij het afstemmen van een radio: een elektrische trillingskring wordt afgestemd op een bepaalde golflengte, de resonantiefrequentie.

Voor nlt kan de module beëindigd worden met dit hoofdstuk 5. Er volgt nog een hoofdstuk 6 over complexe getallen, die een wiskundige verdieping geeft, geschikt voor wiskunde D.

### Wat vonden leerlingen en docenten ervan?

De module *Complexe Stromen* is enkele malen gegeven aan leerlingen van het JCU en van het BètaPlus programma<sup>1</sup>. Daarnaast hebben twee partnerscholen van het JCU de module in een klas getest. Het onderwijs werd meestal gegeven door een team van twee docenten; een wiskundige en een natuurkundige. Ze vulden elkaar aan. De samenwerking leidde ook tot leuke discussies in de klas tussen beide docenten en met de leerlingen. Immers, de wiskundige insteek is anders dan de natuurkundige. Ook leerden de docenten veel van elkaar, inhoudelijk, bijvoorbeeld over de natuurkunde van wisselstromen, en/of didactisch, hoe een collega zijn les opbouwt of met leerlingen omgaat. Het is duidelijk dat de module veel van de leerlingen vraagt, maar de docenten vonden het niet te moeilijk voor de leerlingen. Wel is nieuw dat de leerlingen met meer variabelen tegelijk moeten rekenen. Dat vereist doorzetten van ze en 'geloven in formules'. Verder vonden ze het goed dat "de leerlingen wat diepgaander met algebra moesten omgaan. Door het complex rekenen, worden de regels voor het gewone rekenen weer opgehaald en duidelijk gemaakt."

De leerlingen vonden de module wel moeilijk, maar te doen. Een sterk punt vonden ze: "Hij legt een verband tussen iets zuiver wiskundigs en natuurkun-



Leerlingen bezig met practicum.

Foto: Aad Goddijn.

de". Een leerling was lovend over de opzet: "De module is een goed voorbeeld van probleemgericht onderwijs. Aan de hand van het natuurkundige probleem wordt duidelijk dat een wiskundig hulpmiddel noodzakelijk is, waarna wordt afgeleid hoe dit eruit moet zien."

Sommige leerlingen werden erg aangesproken door de wiskunde: "Ik had graag nog meer over complexe getallen geleerd". Maar anderen wilden "meer leren over de praktische toepassingen". Op grond van deze laatste reactie hebben we naast een demonstratiepracticum ook een leerlingenpracticum over schakelingen met spoelen en condensatoren toegevoegd.

Mede op grond van de positieve reacties van de leerlingen en de docenten is de module in april 2010 gecertificeerd voor nlt<sup>2</sup>.

### Tot slot

Karakteristiek in deze module is de afwisseling tussen de natuurkunde die een probleem ontmoet en de wiskunde die daar een oplossing voor kan vinden. Deze module is alleen geschikt voor nlt- of wiskunde D-leerlingen die een NT-profiel hebben. Het is aan te raden deze module als een keuzemodule in te zetten. Als de groep groot genoeg is kun je leerlingen gemotiveerd laten kiezen tussen *Complexe Stromen* en

een andere module, bijvoorbeeld *Hart en Bloedvaten*<sup>3</sup>.

### Noten

1. Panday, V., Terwee, R. & van der Valk, T. (2009). Nlt-modules volgen in een academische omgeving. *NVOX* 34(7), 312-313.
2. Goddijn, A.J., van Hoof, J. & van der Valk, A.E. *Complexe Stromen*. Zie [www.betavak-nlt.nl](http://www.betavak-nlt.nl) onder 'gecertificeerde modules'. Docentmateriaal is aan te vragen via [jcu@uu.nl](mailto:jcu@uu.nl).
3. Koster K., van Rijen H. & van der Valk T. (2010). *Hart en Vaten*, stilstaan bij een hartinfarct. *NVOX* 35(5), 204-206.

#### ♦ Ton van der Valk

is curriculumcoördinator van het Junior College Utrecht (JCU, [www.uu.nl/jcu](http://www.uu.nl/jcu)) en onderzoeker bij het FIsme ([www.fisme.uu.nl](http://www.fisme.uu.nl)).

Hij heeft de aanzet tot het ontwikkelen van deze module gegeven.



#### ♦ Aad Goddijn

is ontwikkelaar van wiskundelesmateriaal bij het FIsme. Hij is ook docent bij het JCU o.a. van de module *Complexe Stromen*, die hij samen met Joost van Hoof ontwikkeld heeft.

